Synthèse de thèse

par

Ariyan Javan Peykar

Explicit polynomial bounds for Arakelov invariants of Belyi curves

Bornes polynomiales et explicites pour les invariants arakeloviennes d'une courbe de Belyi

Soit X une courbe de Belyi, i.e., une courbe défini sur le corps de nombres algébriques. Soit Belyi(X) le degré de Belyi de X. On verra cette invariante en détail plus loin dans cette synthèse. Le résultat principal de cette thèse est :

1. une majoration polynomiale et explicite pour la hauteur de Faltings de X en d,
2. une majoration explicite et polynomiale pour le discriminant de X en d,
3. une majoration explicite et polynomiale pour l'auto-intersection du faisceau dualisant relatif de X sur un modèle semi-stable minimal régulier en d,
4. une majoration polynomiale et explicite pour l'invariant delta de Faltings de X en d,
5. une minoration polynomiale et explicite pour l'invariant delta de Faltings en d.

Ces estimations explicites et polynomiales ont des applications dans le calcul des coefficients des formes modulaires ainsi que la géométrie arithmétique et la géométrie Diophantienne. Avant de donner les applications, on décrit un peu plus précisément les invariantes arakeloviennes mentionnées ci-dessus et leur importance dans :

1. la théorie d'Arakelov,
2. le calcul des coefficients de formes modulaires,
3. le calcul de représentations galoisiennes,
4. la géométrie arithmétique, et
5. la géométrie Diophantienne.

Commençons avec quelques définitions et points historiques.

La hauteur de Faltings a été définie par Faltings pour démontrer la conjecture de Mordell. En effet, il a démontré un théorème de finitude pour la classe d'isogénie d'une variété abélienne sur un corps de nombres. Plus précisément, il a démontré que pour une variété abélienne A sur un corps de nombres K, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de variétés abéliennes B qui sont isogènes à A sur K. Dans sa preuve, il s'avère qu'il est très important de comprendre le comportement de la hauteur de Faltings dans une classe d’isogénie d'une variété abélienne. Ceci est la première apparition de la hauteur de Faltings dans la littérature. La hauteur de Faltings est un exemple d'une invariante arakelovienne. Pour la définir, on commence (après un changement de base fini éventuellement) avec le modèle minimal régulier semi-stable de notre courbe sur l'anneau des entiers de K. Sur ce modèle on a le faisceau dualisant relatif par rapport au spectre d'anneau des entiers de K. Ce fibré en droite est muni d'une métrique admissible dans le sens d'Arakelov. Faltings a montré qu'il y a une métrique sur le déterminant de la cohomologie (ou bien le déterminant du push-forward) uniquement déterminée par ses axiomes. Ceci définit un fibré en droites métrisée sur l'anneau des entiers de K. La hauteur de Faltings est le degre de ce fibre en droite hermitien dans le sens d'Arakelov (divisé par le degré de K). Le résultat principal de cette thèse donne une majoration explicite pour la hauteur de Faltings en le degré de Belyi.

Deuxièmement, le discriminant d'une courbe « mesure » la mauvaise réduction d'une courbe sur un corps de nombres K aux places finies. Pour le définir, on commence (après un changement de base fini éventuellement) avec le modèle minimal régulier semi-stable de notre courbe sur l'anneau des entiers de K. Puis on prend la somme sur le nombre de singularités dans les fibrés géométriques compté avec leur poids. Ceci nous donne un vrai invariant si on divise aussi par le degré du corps de nombres. L'importance de cet invariant se trouve dans la conjecture abc de Masser-Oesterlé. Plus précisément, Szpiro a conjecturé une majoration explicite pour le discriminant d'une courbe elliptique en termes de son conducteur. Cette conjecture implique une version de la conjecture abc. Le résultat principal de cette thèse donne une majoration explicite pour le discriminant en le degré de Belyi.

Pour démontrer la conjecture de Bogomolov pour les courbes de genre au moins deux, Szpiro, Ullmo et Zhang ont du montré la positivité stricte de l'auto-intersection du dualisant relatif de X. La non-negativité de l'auto-intersection du dualisant relatif était dèja connue par les travaux de Faltings. En plus, la preuve de Arakelov-Parshin de la conjecture de Shafarevich géométrique montre l'importance d'une majoration explicite de cette invariant arakelovienne en termes du genre de X, les places de mauvaises réduction de X, et le corps de nombres. Malheureusement, en ce moment on ne dispose pas d'une telle majoration pour toutes les courbes X. Le résultat principal de cette thèse donne une majoration explicite de l'auto-intersection du faisceau dualisant relatif en le degré de Belyi.

L'invariant delta de Faltings est une invariant arakelovienne associé à X. Elle est de nature analytique. Plusieurs mathématiciens l'ont étudie. Notamment Bost, Faltings, de Jong, Jorgenson, Kramer et Wentworth. Il semble très difficile de calculer cette invariant. Néanmoins, on a réussi dans cette these de minorer et majorer cette invariant explicitement dans le degré de Belyi. Pour expliquer le résultat principal de cette thèse, on défini la notion du degré de Belyi d'une courbe.

Soit X une courbe sur le corps de nombres algébriques. Belyi a montré qu'il existe une fonction rationnelle sur X avec exactement trois points de branchements : 0, 1 et le point à l'infini. On appelle une telle fonction une fonction de Belyi. On défini le degré de Belyi de X, noté comme Belyi(X), comme le minimum des degrés de toutes les fonctions de Belyi sur X. Cette invariant de la courbe est comme une hauteur sur l'espace de modules de courbes sur le corps de nombres algébriques. Plus précisément, pour un nombre réel C, l'ensemble de classes d'isomorphisme de courbes dont le degré de Belyi est borné par C est fini.

On peut donner un énoncé plus précis du résultat principal de cette thèse maintenant. Soit X une courbe lisse projective et connexe sur le corps de nombres algébriques. Soit h la hauteur de Faltings de X. Soit D le discriminant de X. Soit *omega^2* l'auto-intersection du dualisant relatif comme défini ci-dessus. Soit delta l'invariant delta de Faltings de X. Alors on a

$$\max(h, D, omega^2, delta) < 10^c Belyi(X).$$

Dans le reste de ce synthèse on explique l'idée de la preuve de cet inégalité et on donne trois applications de cette majoration qui sont algorithmique, géométrie et Diophantienne, respectivement.

Pour démontrer l'inégalité ci-dessus on utilise la géométrie d'Arakelov. Plus précisément, on utilise l'accouplement d'intersection d'Arakelov sur une surface arithmétique. Le premier résultat qu'on utilise est dû à Faltings. En effet, soit X une courbe lisse projective et connexe sur le corps de nombres algébriques. Supposons que le genre g de X est au moins deux. Sous cette hypothèse, il y a une hauteur canoniquement associé au faisceau dualisant relatif muni de sa métrique d'Arakelov dans le sens de la théorie d'Arakelov. Pour x en X un point fermé, on note $h(x)$ la hauteur de x dans le sens qu'on vient d'expliquer. Alors, Faltings a déduit du théorème de Hodge indice arithmétique l'inégalité suivante :

$$omega^2 < 4g(g-1)\, h(x)$$

où x est un point fermé de X. Cet inégalité implique qu'il suffit de trouver un « petit point » x de X. Ceci est notre stratégie pour démontrer une majoration pour *omega^2*. Pour les autres invariants arakeloviennes on utilise des résultats similaires qu'on peut déduire des propriétés du diviseur de Weierstrass sur X, une majoration pour la fonction theta, la formule de Noether arithmétique, et une minoration de la hauteur de Faltings explicite dû à Bost.

Pour simplifier l'exposition, on explique uniquement la preuve pour la majoration de omega^2. Si

$$f : X \dashrightarrow P^1$$

est une fonction de Belyi, où P^1 est la droite projective, on prends x dans la fibre de f du point ½. Alors, comme ½ n'est pas un point de branchement de f, on peut calculer la hauteur de x en utilisant la théorie d'intersection classique aux places finies et la fonction de Arakelov-Green aux places infinies. Plus précisément, la hauteur de x s'écrit comme une somme de deux termes arithmétiques et analytiques respectivement. Ecrivons

$$h(x) = S + T$$

où S est l'intersection classique du point x (comme section du modèle minimal régulier semi-stable sur l'anneau des entiers du corps de nombres de base) avec le diviseur canonique et T est la fonction de Arakelov-Green du point x évalué au diviseur canonique.

Pour majorer S on commence par construire un « bon » modèle pour la fonction de Belyi f sur l'anneau des entiers de notre corps de nombres (après changement de base éventuellement). Dans la construction de ce modèle on utilise le lemme d'Abhyankar, le théorème de finitude de Grauert-Remmert comme dans un article de Bosch-Lutkebohmert-Raynaud, la résolution de singularités pour les surfaces dû à Lipman, les propriétés de changement de base d'une résolution de singularités minimale d'une surface arithmétique, et le théorème de réduction semi-stable pour les courbes. Comme on doit calculer la hauteur du point x sur le module minimal régulier semi-stable, on doit montrer qu'on peut remplacer ce modèle par notre « bon » modèle. Ceci se fait en deux étapes. D'abord on réduit le calcul à un calcul sur la résolution minimale de notre « bon » modèle. Dans la preuve de cette étape on utilise la formule d'adjonction classique. Dans la deuxième étape on utilise les propriétés de l'accouplement d'intersection classique sur une surface arithmétique, notamment le fait que cette accouplement est défini-négative sur les fibres pour réduire le calcul à un calcul sur notre « bon » modèle. Les propriétés classiques (comme la formule de projection) nous permettent de travailler sur le modèle lisse canonique de la droite projective. Pour finir la preuve, on applique un nouveau résultat de Lenstra qui nous permet de borner la valuation de l'idéal « différente » d'une extension d'anneau de valuations discrète de caractéristique zéro. En utilisant les propriétés du lieu de branchement de notre « bon » modèle on déduit une majoration pour S que est explicite et polynomial dans le degré de f.

Pour majorer T on doit utiliser la théorie analytique pour les courbes sur un corps de nombres. Plus précisément, il faut qu'on borne les fonction de Arakelov-Green sur une fonction de Belyi. C'est-à-dire qu'on veut borner le surpremum du fonction d'Arakelov-Green sur une courbe en termes de son degré de Belyi. On utilise un théorème de Franz Merkl. Merkl a montré qu'on peut borner le surpremum de la fonction d'Arakelov-Green sur une courbe en termes du data associé à un « atlas de Merkl » sur X. Il s'avère qu'on peut calculer explicitement un « atlas de Merkl » pour X si elle est muni d'une fonction de Belyi. En effet, une fonction de Belyi est un morphisme fini

$$f : X \dashrightarrow P^1$$

qui a exactement trois points de branchement : 0, 1 et l'infini. On peut utiliser la fonction modulaire lambda pour obtenir un morphisme fini

$$pi : X \dashrightarrow X(2)$$

qui est etale sur la courbe modulaire $Y(2)$. Ici la courbe modulaire $Y(2)$ est obtenue comme le quotient du demi-plan de Poincaré par le sous-groupe de congruence principal du niveau 2 du groupe modulaire, et $X(2)$ est la compactification de $Y(2)$ obtenue en ajoutant les trois pointes : 0, 1 et l'infini. Pour construire un « atlas de Merkl » sur X, on commence avec la construction d'un atlas sur $Y(2)$. Ce n'est pas difficile de utiliser juste trois ouverts (et donc trois fonctions de coordination). Chaque ouvert est (via sa fonction de coordination) isomorphe à la disque d'unité ouverte dans le plan complexe. Chaque ouvert contient exactement un point de branchement, et ceci nous permet de monter nos ouverts (et leurs fonctions de coordination) à un atlas sur X via le morphisme pi. On montre dans cette thèse qu'on obtient un vrai « atlas de Merkl ». La preuve est essentiellement élémentaire, mais on doit quand-même utiliser un résultat difficile dû à Jorgenson et Kramer qui nous donne un peu de contrôle sur le quotient de la métrique hyperbolique par la métrique d'Arakelov sur la surface de Riemann obtenue comme le complément de l'ensemble des pointes dans X.

Quand on applique le théorème de Merkl, on obtient une majoration pour le surpremum de la fonction d'Arakelov-Green qui est explicite et polynomial dans le degré de Belyi de *X.* On en déduit une majoration pour *T.*

Ceci nous permet de conclure la preuve du résultat principal de cette thèse. Résumons notre stratégie pour borner *omega^2* :

1. On a commencé par le théorème de Hodge-indice arithmétique dû à Faltings.
2. On a construit un « bon » modèle pour notre fonction de Belyi. Ceci nous a permis de diviser la preuve en une partie arithmétique et une partie analytique.
3. On a montré qu'on peut borner la partie arithmétique en utilisant un théorème de Lenstra et les propriétés classiques de l'accouplement d'intersection classique sur une surface arithmétique.
4. Finalement, on a borné la contribution analytique en utilisant les théorèmes de Merkl et Jorgenson-Kramer.

Commençons d'expliquer les trois applications de notre résultat principal.

La première application de notre résultat principal se trouve dans les travaux de Jean-Marc Couveignes, Bas Edixhoven et Peter Bruin sur le calcul des coefficients de formes modulaires et le calcul des représentations galoisiennes. En effet, ils ont construit un algorithme pour calculer les coefficients d'une forme modulaire. Leurs résultats peuvent être trouvé dans leur livre et la thèse de Peter Bruin. Ils n'avaient pas assez d'information de la réduction semi-stable de la courbe modulaire *X(n)* pour montrer que leur algorithme est polynomial. En effet, la première application de notre résultat principal est une majoration pour la complexité de la mauvaise réduction semi-stable d'une courbe modulaire qui est polynomial dans le niveau de la courbe modulaire. En utilisant les résultats de Edixhoven et al., on peut conclure que l'algorithme de Couveignes-Edixhoven-Bruin est polynomial (sous certains hypothèses standards). Ceci est notre première application du résultat principal de cette thèse.

Il semble très raisonnable que les résultats de Couveignes, Edixhoven et Bruin sur le calcul des coefficients de formes modulaires peuvent être généralisée. Par exemple, le calcul des coefficients modulaires dans les travaux de Couveignes, Edixhoven et Bruin utilise le théorème de Deligne et Shimura pour réduire à calculer les représentations galoisiennes associé à une forme modulaires. On peut se demander si leurs méthodes pour calculer ces représentations galoisiennes peuvent être généralisée au calcul de la cohomologie étale d'une surface lisse projective et géométriquement connexe sur le corps de nombres rationnels. Plus précisément, on conjecture que si *S* est une surface lisse projective et lisse sur le corps de nombres rationnels, alors il existe un algorithme qui prend un nombre premier *l* et calcule la cohomologie étale de *S* avec coefficients dans le corps fini avec *l éléments* exactement comme représentations galoisiennes en temps polynomial en *l.* Si on poursuit une stratégie dû à Edixhoven pour obtenir un tel algorithme on pourra très probablement appliquer le résultat principal de cette thèse pour montrer qu'un tel algorithme est polynomial. En effet, Edixhoven, de Jong et Schepers ont formulé une conjecture sur la hauteur de Faltings en 2010 qui consiste de la première étape dans un tel projet. Dans cette thèse on prouve cette conjecture en utilisant la majoration de la hauteur de Faltings en termes du degre de Belyi.

La conjecture de Edixhoven-de Jong-Schepers se concerne avec des revêtements ramifiés de la droite projective dont le lieu de branchement est fixé. Plus précisément, soit B un ensemble fini de nombres algébriques et d un entier. Il n'est pas difficile de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes d'indice d du groupe fondamental du complément de B dans la droite projective. (En effet, ce groupe fondamental est de type fini, i.e., il peut être engendré par un nombre fini d'éléments. Pour montrer que ce groupe fondamental est de type fini on utilise la topologie des surfaces de genre g.) En particulier, par la théorie de Galois, on peut conclure qu'il n'y a qu'un nombre fini de revêtements ramifiés de degré d de la droite projective dont le lieu de branchement est continue dans B. Donc « la hauteur » d'un tel revêtement est borné en termes de d et B. Dans cette thèse on prouve une version effective de cet énoncé. Plus précisément, soit

$$f: X \dashrightarrow P^1$$

un morphisme fini de degré d de la droite projective P^1 dont le lieu de branchement est continue dans B. Alors, le résultat principal de cette thèse et le théorème de Belyi effective dû a Lily Khadjavi implique qu'il existe un nombre réel explicite c (qui ne dépend que de la hauteur de B et le nombre d'éléments dans l'orbite de Galois de B) et une majoration polynomial et explicite pour la hauteur de Faltings de X en cd, une majoration explicite et polynomial pour le discriminant de X en cd, une majoration explicite et polynomial pour l'auto-intersection du faisceau dualisant relatif de X sur un modèle semi-stable minimal régulier en cd, une majoration polynomial et explicite pour l'invariant delta de Faltings de X en cd et aussi une minoration polynomial et explicite pour l'invariant delta de Faltings en cd. Ce résultat implique une version forte de la conjecture de Edixhoven-de Jong-Schepers.

La troisième application de notre résultat est de nature Diophantienne. En 1983 Faltings a démontré la conjecture de Mordell : une courbe lisse de genre au moins deux sur un corps de nombres n'a qu'un nombre fini de points rationnels. Son fameux théorème n'est pas « effectif ». C'est-à-dire, il n'y a pas d'algorithme qui calcule (en général) l'ensemble fini de points rationnels d'une courbe lisse de genre au moins deux. Ce problème est toujours ouvert et il est à la base de toutes les questions d'effectivité qu'on se pose dans la géométrie Diophantienne. Expliquons d'où vient la non-effectivité du théorème de Faltings. On commence par une explication des conjectures (qui sont des théorèmes maintenant) relevante :

Conjecture de Shafarevich. Soient K un corps de nombres, S un ensemble fini de places finies et g un entier. Alors il existe qu'un nombre fini de classes de isomorphisme de variétés abéliennes A de dimension g sur K et de bonne réduction en dehors de S.

Conjecture d'isogenie. Soient K un corps de nombres et A une variété abelienne sur K. Alors il n'y a qu'un nombre fini de variétés abéliennes (à isomorphisme près) sur K qui sont K-isogenes à A.

Serre et Tate ont montré que la conjecture de Shafarevich implique la conjecture d'isogenie. En effet, si A et B sont deux variétés abéliennes dans la même classe d'isogenie, alors A et B ont le même ensemble de mauvaise réduction. Par contre, il semble très difficile de démontrer la conjecture de Shafarevich directement. C'est pour ça que Faltings a commencé par démontrer la conjecture d'isogénie. Puis il en a déduit la conjecture de Tate (sur la semi-simplicité du module de Tate et le critere d'isogénie en termes du module de Tate). Après il a démontré « la conjecture de Shafarevich pour les représentations galoisiennes » et il l'a combiné avec la conjecture de Tate pour en déduire la conjecture de Shafarevich mentionnée ci-dessus. Revenons à la non-effectivité de la preuve de Faltings. A priori, aucune partie de la preuve de Faltings était effective. Plus tard, Masser et Wustholz ont donné une preuve de la conjecture d'isogénie effective. Donc la partie non-effective de la preuve de la conjecture de Shafarevich se trouve dans la conjecture de Shafarevich pour les représentations galoisiennes. Et donc, comme Faltings déduit la conjecture de Mordell de la conjecture de Shafarevich en utilisant une construction fameuse dû a Kodaira et Parshin, la non-effectivité de la preuve de Faltings de la conjecture de Mordell se trouve cependant dans la partie « galoisienne ». Néanmoins, pour obtenir des résultats effective recemment de Jong-Rémond et von Kaenel ont obtenue des versions effective de la conjecture de Shafarevich pour certaines courbes. Décrivons leurs résultats un peu plus précisément. D'abord on va se restreindre au courbes « hyperboliques ». Commençons avec le théorème de finitude de Faltings.

Théorème. (Faltings, 1983) Soient K un corps de nombres, S un ensemble fini de places finies et g un entier au moins deux. Alors il n'y a qu'un nombre fini de courbes lisse projective sur K de genre g et de bonne réduction en dehors de S.

Ce théorème découle de la conjecture de Shafarevich pour les variétés abéliennes ci-dessus et le théorème de Torelli (combiné avec un argument standard pour gérer les twists). Une version effective de ce théorème peut être formule comme suite.

Conjecture. Soient K un corps de nombres, S un ensemble fini de places finies et g un entier au moins deux. Alors, il existe un nombre réel **explicite** c(K,S,g), qui ne dépend que de K, g et S, tel que pour toute courbe X sur K de genre g et de bonne réduction en dehors de S on ait l'inégalité

hauteur de Faltings de X < c(K,S,g).

Cette conjecture est plus forte que le théorème, mais on ne sait pas la démontrer en ce moment. Néanmoins, on a le résultat suivant dû à Robin de Jong et Gael Rèmond :

Théorème. (de Jong-Rèmond) Soient K un corps de nombres, S un ensemble fini de places finies et g un entier au moins deux. Alors, il existe un nombre réel **explicite** c(K,S,g), qui ne dépend que de K, g et S, tel que pour toute courbe X sur K de genre g et de bonne réduction en dehors de S qui est un revêtement cyclique de la droite projective de degré premier on ait l'inégalité

hauteur de Faltings de X < c(K,S,g).

La constante c(K,S,g) se calcule comme suite.

1. Un théorème dû a Pazuki et Bost-David pour comparer explicitement la hauteur de Faltings d'une variété abélienne principalement polarisée avec sa hauteur theta.
2. Un théorème de Rémond pour comparer la hauteur theta de la jacobienne de X avec

la hauteur d'ensemble de birapports associé au revêtement cyclique. (Ici on utilise que *X* est muni d'un revêtement cyclique de la droite projective de degré premier.)

3. Un résultat de de Jong-Rémond pour montrer que les birapports satisfont l'équation de *S*-unité dans une extension finie de *K* dont le discriminant et le degré sont borné.
4. La théorie de formes logarithmiques de Baker et les résultats de Gyory-Yu pour borner la hauteur d'ensemble de birapports associé au revêtement cycliques. (Ici on doit utiliser que les birapports satisfont une équation d'unité.)
5. On conclut en utilisant des résultats effectives en théorie de nombres algébriques.

Rafael von Kaenel a appliqué une stratégie comparable pour obtenir des résultats similaires.

Dans cette thèse on considère une autre approche. Au lieu de borner la hauteur de Faltings directement, on montre l'existence d'un petit point. Soyons plus précise.

Conjecture. (Szpiro, 1985) Soient *K* un corps de nombres, *S* un ensemble fini de places finies et *g* un entier au moins deux. Alors, il existe un nombre réel **explicite** c(K,S,g), qui ne dépend que de *K, g* et *S,* tel que pour toute courbe *X* sur *K* de genre *g* et de bonne réduction en dehors de *S* on ait un point fermé *x* dans *X* et l'inégalité

$$h(x) < c(K,S,g).$$

On utilise dans cette thèse notre résultat principal pour démontrer cette conjecture pour les revêtements cycliques de la droite projective de degré premier.

Théorème. (J.- von Kaenel) Soient *K* un corps de nombres, *S* un ensemble fini de places finies et *g* un entier au moins deux. Alors, il existe un nombre réel **explicite** c(K,S,g), qui ne dépend que de *K, g* et *S,* tel que pour toute courbe *X* sur *K* de genre *g* et de bonne réduction en dehors de *S* qui est un revêtement cyclique de la droite projective de degré premier on ait un point fermé *x* de *X* et l'inégalité

$$h(x) < \mathrm{c(K,S,g)}.$$

En utilisant un résultat de Zhang on arrive à démontrer un théorème plus fort :

Théorème. (J.- von Kaenel) Soient *K* un corps de nombres, *S* un ensemble fini de places finies et *g* un entier au moins deux. Alors, il existe un nombre réel **explicite** c(K,S,g), qui ne dépend que de *K, g* et *S,* tel que pour toute courbe *X* sur *K* de genre *g* et de bonne réduction en dehors de *S* qui est un revêtement cyclique de la droite projective de degré premier on ait un nombre infini de points fermés *x* de *X* qui satisfont l'inégalité

$$h(x) < \mathrm{c(K,S,g)}.$$

Pour démonter ce résultat on utilise une stratégie différente que de Jong-Rèmond. En effet, la constante c(K,S,g) dans notre théorème se calcule comme suit.

1. Notre résultat principal montre qu'il suffit de borner le degré de Belyi pour démontrer notre théorème (ou bien le théorème de de Jong-Rèmond). Donc on peut se concentrer sur le degré de Belyi de *X*.

2. Pour borner le degré de Belyi de *X* on utilise une version effective du théorème de Belyi dû à Khadjavi pour réduire à borner la hauteur des points de branchements.
3. Il est claire que la hauteur d'ensemble des points de branchements est borner par la hauteur des birapports associé à cet ensemble.
4. Le résultat de de Jong-Rémond mentionné ci-dessus montre que les birapports satisfont l'équation de *S*-unité dans une extension finie de *K* dont le discriminant et le degré sont bornés.
5. La théorie de formes logarithmiques de Baker et les résultats de Gyory-Yu pour borner la hauteur d'ensemble de birapports associé au revêtement cycliques. (Ici on doit utiliser que les birapports satisfont une équation d'unité.)
6. On conclut en utilisant des résultats effectives en théorie de nombres algébriques.

On trouve des majorations plus forte que de Jong-Rèmond et on considère aussi des stratégies différentes sous certains hypothèses supplémentaires. On trouve des bornes encore mieux sous certaines hypothèses supplémentaires et on considère aussi l'importance de la conjecture *abc* pour ce problème. Ceci nous montre quel sont les meilleurs bornes qu'on peut espérés pour les invariantes arakeloviennes qu'on étudie dans cette thèse.

Il est très probable que nous ne pouvons pas déduire des applications comme la conjecture de Mordell effective de nos résultats mais un résultat de Aaron Levin nous donne quand-même d'espoir pour une application effective de nos résultats.

En effet, Aaron Levin a montré que si on veut démontrer une version effective du théorème de Siegel pour les courbes de genre deux il suffit de démontrer une version effective de la conjecture de Shafarevich pour les surfaces abéliennes. Son résultat est au fait plus général mais dans ce synthèse on ne donne pas la version la plus précise. Disons quand-même que le résultat de Levin suggère qu'il est raisonnable de s'attendre à des applications de nos résultats dans la géométrie Diophantienne effective.

Finissons ce synthèse en donnant encore une application et plusieurs nouvelles idées.

Dans cette thèse on a aussi étudié le comportement des invariants arakeloviennes des courbes modulaires hyperboliques, les courbes de Hurwitz, les courbes de Fermat et les courbes de Wolfart. On trouve en utilisant un résultat dû à Zograf qui majore l'indice d'une courbe modulaire hyperbolique par

$$128(\text{genre}+1)$$

et la majoration pour le nombre d'automorphisme d'une courbe hyperbolique (en général), que les invariantes arakeloviennes d'une courbe hyperbolique de genre *g* de Wolfart, Fermat, Hurwitz ou modulaire soit borné par

$$10^{19}g^7.$$

Pour finir ce synthèse on mentionne deux projets qu'on peut voir comme des prolongements de cette thèse.

Premièrement, dans cette thèse on a étudié le comportement des invariants arakeloviennes d'une courbe hyperbolique sur le corps de nombres rationnels. C'est un problème naturel de considérer maintenant des invariants arakeloviennes « relative » à un corps de nombres. Ceci semble possible avec les résultats et techniques de cette thèse. En plus, on peut montrer (en utilisant *grosso modo* les mêmes techniques dans cette thèse) que la hauteur d'un revêtement d'une surface arithmétique de degré borné et dont le lieu de branchement est fixé est borné explicitement par une expression dans le degré et le lieu de branchement. Ceci nous donne une nouvelle preuve (plus effective) de la « smallness » du groupe fondamental étale d'une surface arithmétique.

Finalement, on mentionne trois nouvelles directions relevantes.

Premièrement, on doit mentionner que les résultats de cette thèse étaient inspiré par un résultat en géométrie complexe dû à Edixhoven, de Jong et Schepers. Ce résultat s'applique aux familles de courbes sur une courbe. Plus précisément, ils montrent que la hauteur d'un revêtement d'une famille de courbes sur une courbe est borné par un polynôme linéaire dans le degré du revêtement dont les coefficients ne dépendent que du lieu de branchement. On peut généraliser ce résultat aux hauteurs de familles de variétés sur une courbe en utilisant une généralisation de l'inégalité d'Arakelov.

Deuxièmement, on montre la vraie analogue de notre résultat en géométrie complexe en utilisant *grosso modo* la même stratégie de preuve. Le seul problème étant qu'on ne dispose pas d'un « théorème de Belyi ».

Finalement, on veut étudier une conjecture de Szpiro et Bogomolov sur le degré de Belyi :

Conjecture. Soit X une courbe sur un corps de nombres K. Il existe un nombre réel c qui ne dépend que des invariants arakeloviennes de X, le genre de X et le degré de K tel que l'inégalité suivante soit vraie :

$$\mathrm{Belyi}(X) < c.$$

On peut montrer l'analogue de ce théorème en géométrie complexe, i.e., pour les corps de fonctions sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.